DOI: 10.12737/article_59c21391604168.79848908
УДК 51

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО СТАТИСТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О МИНИМАЛЬНОМ ВЗВЕШЕННОМ ПОКРЫТИИ

кандидат технических наук, доцент **Д.Д. Лапшин**[1]
доктор технических наук **М.Л. Лапшина**[2]
кандидат технических наук **Н. Ю. Юдина**[2]
1 - ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»,
Воронеж, Российская Федерация
2 - ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова»,
Воронеж, Российская Федерация

В работах Германа О.В. был предложен статистически оптимальный алгоритм для отыскания минимального покрытия 0,1-матрицы для невзвешенной матрицы. Алгоритм основан на итеративном добавлении к матрице новых столбцов (столбцы-резольвенты), которые строятся согласно сформулированному авторами принципу групповых резолюций (ПГР). Они обладают следующим свойством. В предположении, что еще не получено оптимальное покрытие, каждое такое покрытие содержит как минимум одну строку из числа тех, которые покрывают столбец- резольвенту. После добавления каждого нового столбца, рассматриваемого как случайный *0*,1-вектор, производится аналитическая оценка математического ожидания числа минимальных покрытий с заданным количеством строк. По результатам оценки делается вывод о необходимости продолжения итераций или прекращения алгоритма. Данная оценка базируется на правиле "$K\sigma$", устанавливающем вероятность попадания случайной величины с биномиальным законом распределения в интервал $\mu_x \pm K\sigma$, близкой к единице. Установлено, что сложность алгоритма ограничена сверху величиной $o(\frac{ntp}{\sqrt{1-p}})$, где $n(m)$ число строк (столбцов) в матрице; p - плотность (частота) единичных элементов в матрице, $0 < p < 1$. Эта оценка сложности получена для $K = 3$. Алгоритм проверен для 600 случайно сгенерированных задач с последующим сравнением с точным решением. Можно сделать вывод, что аналитические оценки для математического ожидания числа покрытий с заданным размером устойчивы для матриц большой размерности. Напротив, с уменьшением числа столбцов эти оценки менее устойчивы. Несомненное, на наш взгляд, достоинство метода - его высокое быстродействие. Таким образом, в подавляющем большинстве случаев алгоритм завершает работу отысканием точного решения задачи, что позволяет считать его статистически оптимальным. Достоинством метода является его быстродействие, но опытным путем проверено, что увеличение размерности задачи приводит к непрогнозируемым провалам.

Ключевые слова: матрица, алгоритм, строки, столбцы, веса

USING A GENERALIZED STATISTICALLY OPTIMAL METHOD OF SOLUTION FOR MINIMUM WEIGHTED COVER TASK

PhD (Engineering), Associate Professor **D.D. Lapshin**[1]
Doctor of Technical Sciences, **M.L. Lapshina**[1]
PhD (Engineering), Associate Professor **N.Yu. Yudina**[2]
1-FSBEI HE «Voronezh State Technical University», Voronezh, Russian Federation
2-FSBEI HE «Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov» Voronezh, Russian Federation

Abstract

Statistically optimal algorithm for finding minimal cover of 0.1-matrices for the unweighted matrix has been proposed in the works of O. V. German. The algorithm is based on iterative addition of new columns (columns-resolvent) to the matrix, which are built according to the authors' formulated the principle of group resolution (PGR). They have the following property. Under the assumption that optimal cover has not been obtained yet, each such cover contains at least one row from among those that cover the column - resolvent. After adding each new column, considered as a random 0.1-vector, analytical evaluation of mathematical expectation of the number of minimal covers with a given number of rows is made. The evaluation concludes the need to continue the iterations or termination of the algorithm. After evaluation it can be concluded about the necessity to continue the iterations or termination of the algorithm. This estimate is based on the rule "$K\sigma$", which establishes the probability that a random variable with a binomial distribution will enter the interval $\mu_x \pm K\sigma$, close to unit.. It is established that complexity of the algorithm is bounded above by a value $o(\frac{ntp}{\sqrt{1-p}})$, where $n(m)$ number of rows (columns) in the matrix; p - density (frequency) of individual elements in the matrix, $0 < p < 1$. This estimate of the complexity is obtained for $K = 3$. The algorithm is tested for 600 randomly generated problems with a subsequent comparison with the exact solution. It can be concluded that analytical estimates for mathematical expectation of the number of covers with specified size are stable for matrices of large dimension. On the contrary, with a decrease in the number of columns these estimates become less stable. Doubtless, in our opinion, advantage of this method is its high speed. Thus, in the vast majority of cases, the algorithm concludes by finding the exact solution, which makes to consider it statistically optimal one. The advantage of this method is its speed, but it is empirically proven that increase in the dimension of the problem leads to unpredictable failures.

Keywords: matrix, algorithm, rows, columns, weight

Настоящая статья предлагает статистически оптимальный алгоритм распространить на более общий случай, в котором переменные входят в целевую функцию с произвольными неотрицательными коэффициентами, построенный алгоритм позволяет получить оптимальное решение в большинстве случаев, причем процент задач с точным решением увеличивается с увеличением числа итераций.

Пусть $B_{n,m}$ - 0,1-матрица без нулевых столбцов и строк, состоящих из одних единиц. Полагаем, что $B_{n,m}$ не содержит одинаковых столбцов.

Для каждой строки β известен ее вес C_β (будем считать его целым неотрицательным числом). Говорят, что строка β покрывает столбец α, если $B(\beta, \alpha) = 1$, где $B(\beta, \alpha)$ - элемент матрицы $B_{n,m}$, расположенной на пересечении строки β и столбца α. Множество строк π есть покрытие для $B_{n,m}$, если каждый столбец из $B_{n,m}$ покрывается хотя бы одной строкой из π. Покрытие π неизбыточное, если из него нельзя удалить ни одной строки без потери свойства покрытия. Покрытие π называется минимальным взвешенным покрытием, если оно доставляет минимум суммы $\sum_{\beta \in \pi} C_\beta$ среди всех неизбыточных покрытий матрицы $B_{n,m}$.

Нас интересует следующая задача: для $B_{n,m}$ и заданных весов строк найти минимальное взвешенное покрытие. Проведем формализацию игр. Столбец, содержащий синдромный элемент, назовем синдромным столбцом.

Определение. Столбец α_r называется избыточным, если в матрице найдется другой столбец a_s, такой, что любая строка, содержащая в a_s “1”, также содержит “1” в a_r. Нетрудно видеть,что избыточные столбцы можно удалить из матрицы без потери решения. Пусть π - некоторое неизбыточное взвешенное покрытие (получаемое любым достаточно хорошим эвристическим алгоритмом; в частности, мы опишем далее “жадный” алгоритм для ЗМВП). Так, для матрицы на рис. 1 имеем: $\pi = \{\beta_2, \beta_3, \beta_6, \beta_7, \beta_9\}$ с весом $C_\pi = 18$. Найдем для этого покрытия множество синдромных столбцов $\{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{15}\}$. В найденном множестве выберем число столбцов, равное размеру покрытия π (в данном примере - 5). Итак, выберем 5 столбцов, причем такие, что они не содержат двух или более синдромных элементов покрытия π в одной какой-либо строке из π.

Вес	C	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}
6	β_1		1					1		1					1		
2	β_2			1			1	1				1					
4	β_3				1	1			1				1			1	
10	β_4		1	1								1	1	1			1
8	β_5					1	1									1	
3	β_6								1	1					1		1
3	β_7	1	1		1						1					1	
7	β_8	1						1				1	1				
6	β_9	1		1						1				1	1		
5	β_{10}					1			1		1						1
8	β_{11}	1	1					1			1			1	1		
4	β_{12}				1		1		1								

Рис. 1. Исходная матрица

Это всегда можно сделать, так как π неизбыточно. Выберем, например, столбцы $\{\alpha_4, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{12}, \alpha_{15}\}$ и построим на них подматрицу исходной матрицы (рис. 2). В полученной подматрице выделим два непересекающихся множества строк: SR_π^I и SR_π^{II}; каждая строка из SR_π^I содержит не более одной единицы в полученной подматрице; каждая строка из SR_π^{II} содержит более одной единицы. Имеем:

$$SR_\pi^{II} = \{\beta_4, \beta_{10}, \beta_{11}\},$$

$$SR_\pi^{I} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_9, \beta_{12}\}.$$

Приведем теперь следующие ключевые рассуждения. Допустим, что ни одно оптимальное решение не содержит ни одной строки из SR_π^{II}. При этом определим в множестве SR_π^I 5 (опять же по числу строк в π) непересекающихся подмножеств строк, таких, что первое подмножество покрывает столбец α_4, второе - α_9, третье - α_{10},четвертое - α_{12} и пятое - α_{15} (каждая строка в S_{α_j} покрывает столбец α_j). Получаем следующее разбиение

$$S_{\alpha_4} = \{\beta_3, \beta_5\},\ S_{\alpha_9} = \{\beta_7\},$$

$$S_{\alpha_{10}} = \{\beta_2, \beta_8\},\ S_{\alpha_{12}} = \{\beta_9\},\ S_{\alpha_{15}} = \{\beta_6\},$$

Ясно, что если существует покрытие меньшей стоимости, чем $\pi = \{\beta_2, \beta_3, \beta_6, \beta_7, \beta_9\}$, то его стоимость (вес) ограничена снизу величиной

$$C = \min\{C_{\beta_3}, C_{\beta_5}\} + \min\{C_{\beta_7}\} + \min\{C_{\beta_2}, C_{\beta_8}\} + \min\{C_{\beta_9}\} + \min\{C_{\beta_6}\} = 4 + 3 + 2 + 6 + 3 = 18.$$

Назовем $\hat{C}$ текущей нижней границей .

Утверждение 1. Если стоимость найденного покрытия π меньше текущей нижней границы ЗМВП или равна ей, то в предположении, что π неоптимально, каждое оптимальное покрытие содержит как минимум одну строку из SR_π^{II}. Такая формулировка не является избыточной и сохраняет силу для последующего обобщения и усиления утверждения 1.

	α_4	α_9	α_{10}	α_{12}	α_{15}	Вес
β_1						6
β_2			1			2
β_3	1					4
β_4			1	1	1	10
β_5	1					8
β_6					1	3
β_7		1				3
β_8			1			7
β_9				1		6
β_{10}	1	1			1	5
β_{11}		1		1		8
β_{12}						4

Рис. 2. Подматрица исходной матрицы

Утверждение 1. Более строго, пусть столбцы $\{\alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_z}\}$ образуют подматрицу, на которой определяется множество строк SR_π^{II}.

Построим столбец α*, содержащий “1” в строках, включенных в SR_π^{II}, “0” - в остальных. Тогда

α^*, по определению, резольвента столбцов $\{\alpha_1,...,\alpha_7\}$. Термин "резольвента" использован здесь в следующем смысле: любое оптимальное покрытие матрицы $B_{n,m}$ при условиях, указанных в утверждение 1, содержит как минимум одну строку в множестве SR_{π}^{II}, определяемом на основании столбцов $\{\alpha_{i_1},...,\alpha_{i_z}\}$. Остается сделать последний шаг для случая, когда условия утверждения 1 не выполняются, а именно, стоимость найденного покрытия превосходит $\hat{C}$. Здесь нужно исключить некоторые строки из разбиения $\{S_{\alpha_i},...,S_{\alpha_r}\}$ и включить их в SR_{π}^{II} с тем, чтобы значение $\hat{C}$ возросло и стало не меньше стоимости покрытия π. Мы предлагаем следующий способ. Найдем строки ρ с минимальными весами из каждого множества $\{S_{\alpha_i},...,S_{\alpha_r}\}$. Из ρ удалим строки, принадлежащие π. Найдем в ρ такую строку, перевод которой в SR_{π}^{II} максимально увеличивает $\hat{C}$. Данную строку выведем из SR_{π}^{I} и включим в SR_{π}^{II}. Если требуется, повторим эту схему еще раз. Столбец-резольвента, очевидно, исключает какие-то неизбыточные покрытия из пространства решений, поэтому мы называем его также отсекающим столбцом. Утверждение 1 имеет следующую более сильную формулировку.

Утверждение 1* (усиленная форма). Пусть π - текущее неизбыточное покрытие и π* - наилучшее из уже найденных покрытий. Если стоимость π* меньше либо равна величине $\hat{C}$, вычисляемой для *π,* то в предположении, что π* неоптимально, каждое оптимальное покрытие содержит как минимум одну строку из множества SR_{π}^{II}, определенного на синдромных столбцах текущего покрытия *π.*

Докажем утверждения 1 и 1^* от противного. Положим, что ни одна строка из SR_{π}^{II} не входит в лучшее покрытие. Нетрудно сообразить, что тогда любое неизбыточное покрытие будет иметь вес, по крайней мере не меньший величины $\hat{C}$. Так как по предположению утверждения $C_{\pi^{opt}} < \hat{C}$, то получаем противоречие. Следующее утверждение устанавливает, что мы гарантированно добавим как минимум один отсекающий столбец, который не может быть удален как избыточный.

Утверждение 2. Если для генерации отсекающего столбца α^* выбраны синдромные столбцы $\mathrm{A}=\{\alpha_{i_1},...,\alpha_{i_z}\}$ так, что ни одна строка из покрытия и не содержит более одной единицы в столбцах $\{\alpha_{i_1},...,\alpha_{i_z}\}$ и каждый столбец А покрывает одна строка из π, то α* не может быть исключен из $B_{n,t}$ как избыточный столбец. Примем утверждение 2 и 3 без доказательства.

Утверждение 3. Найденное неизбыточное покрытие π будет решением данной задаче о минимальном взвешенном покрытии (ЗМВП), если $SR_{\pi}^{II}=\varnothing$.

Утверждение 2 устанавливает конечность (сходимость) принцип групповых резолюций.

Утверждение 1* может быть обобщено следующим образом для произвольной подматрицы $B_{n,t}$. Пусть $\hat{C}(B_{n,t})$ - текущая нижняя граница ЗМВП, вычисленная на $B'_{n,t}$, и C_{π^*} - стоимость (вес) наилучшего из найденных покрытий. Смысл обозначений $SR_{\pi}^{I}(B'_{n,t})$ и $SR_{\pi}^{II}(B'_{n,t})$ сохранен применительно к подматрице $B'_{n,t}$. Тогда, если $\hat{C}(B_{n,t})\geq C_{\pi}$, то из предложения о неоптимальности π* заключаем, что как минимум одна строка из $SR_{\pi}^{II}(B'_{n,t})$ входит в лучшее решение. Это обобщение позволяет находить более эффективные отсечения и доказывается из тех же соображений, что и утверждение 1*.

В качестве иллюстрации рассмотрим подматрицу на рис. 3, выбранную из исходной матрицы на рис. 1. Для нее $\hat{C}=6+4+3+7=20$.

Так как ранее найдено покрытие с весом $18<20$, то находим $SR_{\pi}^{II}=\{\beta_2,\beta_4\}$. Итак, ПГР для ЗМВП последовательно определен [2].

Наш метод реализован как итерационная процедура, которая на каждой итерации определяет неизбыточное покрытие матрицы $B_{n,m}$ на основе достаточно хорошего эвристического алгоритма и строит новый столбец-отсечение на базе найденного покрытия. Если этот столбец - нулевой, то алгоритм детерминированно завершается отысканием точного решения ЗМВП (согласно утверждению 3), иначе выполняется оценка математического ожидания числа (μ_*) взвешенных минимальных покрытий меньшей стоимости. Если эта оценка попадает в доверительный интервал, определяемый по правилу $K\sigma, K \geq 3$, то итерации заканчиваются, в противном случае - продолжаются. Число итерации по утверждению 2 гарантированно конечно.

	α_2	α_4	α_9	α_{10}	Вес
β_1					6
β_2	1	1		1	2
β_3					4
β_4	1			1	10
β_5		1			8
β_6					3
β_7			1		3
β_8				1	7
β_9	1				6
β_{10}			1		5
β_{11}			1		8
β_{12}	1				4

Рис. 3. Подматрица исходной матрицы. построенная для уточнения покрытия

Приведенная общая схема может быть объяснена с эвристических и формальных сторон.

Пусть некий эвристический алгоритм доставляет точное решение задачи при однократном выполнении с вероятностью *r;q* - допустимая вероятность потери решения. Тогда число итераций *N* с отсечением получаемых промежуточных решений оценивается из соотношения $(1-r)^N \leq q,$, откуда

$$N \geq \ln q / \ln(1-r) \approx (1-r)/r$$

Объяснение с эвристических позиций. Например, для *q*=0,01, *r*=0,01, *N*=100. Заметим, что на оценку *N* не влияет (во всяком случае, очевидным образом) размерность задачи. Кроме того, здесь не учитывается тот факт, что выполнение отсечений сужает область поиска и вероятность *r* перманентно растет.

Объяснение формальное. Приводимые вероятностные оценки для μ_* получены для метода [1], в котором реализован алгоритм "жадного" поиска, и эти оценки формально обоснованы. Должно быть ясно, что число итераций алгоритма зависит от реализуемого для получения неизбыточных покрытий эвристического алгоритма. Поэтому возможны иные оценки для алгоритмов, отличных от "жадного". Таким образом, мы сохраняем преемственность полученных в [1] оценок для ЗМВП.

Отметим, что методика [1] в случае ЗМВП прямо не проходит, поэтому мы показываем далее, как взвешенная задача о покрытии может быть сведена к невзвешенному случаю, что позволяет использовать уже разработанную методику. Предварительно мы даем необходимый технический результат.

Пусть $D_{n,n}$ - симметричная относительно нулевой главной диагонали 0,1-матрица размером $n \times n$. Через Z обозначим множество строк (и одноименных столбцов) матрицы $D_{n,n}$, которые образуют некоторую нулевую подматрицу матрицы $D_{n,n}$; *Z** - максимальное по числу элементов множество Z для $D_{n,n}$. Нетрудно видеть, что Z* представляет максимальную клику при интерпретации матрицы $D_{n,n}$ как матрицы инцидентности некоторого графа [7].

Задача о максимальной клике (ЗМК) формулируется как отыскание Z* для $D_{n,n}$. Сначала покажем, как эффективно свести ЗМК и ЗМП.

Пусть дана матрица $D_{n,n}$ (рис. 4). Составим 0,1-матрицу $C_{n,M}$ с элементами $C(k,i) = C(j,i) = 1$, тогда и только тогда, когда если и только если $D(k,j) = 1.$ Отметим, что номер столбца *i* никак не связан с элементом $D(k,j)$, а определяется для порядкового номера этого элемента в матрице (из двух симметричных единичных элементов учитывается только один, поэтому число столбцов в $C_{n,M}$ равно половине от числа единиц в $D_{n,n}$). Матрица $C_{n,M}$, соответствующая $D_{n,n}$ на рис. 4а, показана на рис. 4б.

Назовем матрицу $C_{n,M}$ двойственной к $D_{n,n}$.

Утверждение 4. Пусть $\pi^* = \{\beta_1, ..., \beta_z\}$ - минимальное покрытие двойственной матрицы $C_{n,M}$ и *Rows* - множество всех строк (столбцов) матрицы $D_{n,n}$.

Тогда $Z^* = Rows \setminus \pi^*$ (1)

где \ - теоретико-множественная разность.

Крайне важно обобщение утверждения 4.

Пусть $B_{n,t}$ - произвольная матрица для ЗМП. Пусть столбец α покрывается строками $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ Тогда столбец α связывается (сопоставляется) с дизъюнктом: $D_\alpha = \beta_1 \vee \beta_2 \vee ... \vee \beta_k$, который обозначим как $D_\alpha^* = *(\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, ..., \overline{\beta}_k)$, интерпретируя символ * отношением несовместности (операцией Шеффера). Теперь множество *Z**, определяемое для системы дизъюнктов $\tilde{D} = \left\{D_j^*\right\}$, $j = 1, ..., m$, интер-претируется как максимальное по числу элементов множество строк $\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, ..., \overline{\beta}_k$, никакое подмножество которых не является несовместным.

	$\overline{\beta}_1$	$\overline{\beta}_2$	$\overline{\beta}_3$	$\overline{\beta}_4$	$\overline{\beta}_5$	$\overline{\beta}_6$	$\overline{\beta}_7$
$\overline{\beta}_1$		1		1			
$\overline{\beta}_2$	1				1	1	
$\overline{\beta}_3$				1			1
$\overline{\beta}_4$	1		1				
$\overline{\beta}_5$		1				1	1
$\overline{\beta}_6$		1			1		
$\overline{\beta}_7$			1		1		

а)

	1	2	3	4	5	6	7	8
β_1	1	1						
β_2	1		1	1				
β_3					1	1		
β_4		1			1			
β_5			1				1	1
β_6				1			1	
β_7						1		1

б)

Рис. 4. Матрица $D_{n,n}$

Ясно, что если $\beta_i \in Z^*$, $\beta_i \in \pi^*$ для двойственной матрицы, и наоборот. Таким образом, *Z** для этого общего случая - максимальная клика в гиперграфе [8], ребра которого связывают вершины $\overline{\beta}_i$ из дизъюнктов D_j^*.

Соотношение (1) верно, очевидно, и для случая гиперграфа. Теперь - основной шаг в наших выкладках, можно пояснить следующем примером.

Пусть дан дизъюнкт:

$$D_j^* = *(\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, ..., \overline{\beta}_k) \; (D_j = \beta_1 \vee \beta_2 \vee ... \vee \beta_k),$$

причем вес строки β_1 равен 2; строки β_2 - 3; строки β_3 - 1. Заменим D_j^* множеством его копий, причем введем две копии строки $\beta_1(\beta_1^1$ и $\beta_1^2)$ по весу β_1; 3 копии $\beta_2(\beta_2^1, \beta_2^2, \beta_2^3)$ по весу β_2^1 и т.д. Получаем следующее множество дизъюнктов

$$D_j^{1*} = *(\overline{\beta}_1^1, \overline{\beta}_2^1, \overline{\beta}_3), D_j^{2*} = *(\overline{\beta}_1^1, \overline{\beta}_2^1, \overline{\beta}_3),$$

$$D_j^{3*} = *(\overline{\beta}_1^1, \overline{\beta}_2^3, \overline{\beta}_3), \; D_j^{4*} = *(\overline{\beta}_1^1, \overline{\beta}_2^2, \overline{\beta}_3),$$

$$D_j^{5*} = *(\overline{\beta}_1^2, \overline{\beta}_2^1, \overline{\beta}_3), \; D_j^{6*} = *(\overline{\beta}_1^2, \overline{\beta}_2^3, \overline{\beta}_3).$$

Назовем указанное преобразование трансформацией к невзвешенному случаю ЗМК (ТНЗМК): трансформация состоит в порождении копий дизъюнктов D_j^*. Далее систему дизъюнктов, получаемых на основе ТНЗМК, заменяем двойственной матрицей для задачи ЗМП.

Пусть $B_{n,n}$ - матрица для ЗМВП и $C_1, ..., C_n$ - веса строк. На основе техники ТНЗМК "строим" новую матрицу, в которой веса строк одинаковы и равны единице. В этой новой матрице будет равно $\left(C_1 + \; ... \; + C_n\right)$ строк. Ее столбцы получаются из копий дизъюнктов D_j^*, построенных на основе ТНЗМК, как описано ранее, т.е. если

$D_j^* = *(\overline{\beta}_i, \overline{\beta}_j, \overline{\beta}_k)$, то этому дизъюнкту соответствует столбец с единицами в строках $\beta_i, \beta_j, \beta_k$ и т.п. Теперь ясно, что если в минимальном покрытии новой матрицы ровно *k* строк, то вес оптимального покрытия для соответствующей ЗМВП равен *k*. На рис. 5 в качестве пояснения показан переход от взвешенной матрицы ЗМВП (рис. 5а) к невзвешенной (рис. 5б) согласно рассмотренным принципиальным подходам.

Вес		
2 β1	1	
3 β2	1	1
1 β3	1	
1 β4		1

а)

β_1^1	1	1	1						
β_1^2				1	1	1			
β_2^1	1			1			1		
β_2^2		1			1			1	
β_2^3			1			1			1
β3	1	1	1	1	1	1			
β4							1	1	1

б)

Рис. 5. Переход матрицы одного (взвешенной) типа к другому (невзвешенной)

В действительности нет необходимости строить новую матрицу, поскольку ее количественные характеристики легко вычисляются из исходной матрицы $B_{n,m}$. Нужно будет воспроизвести некоторые важные результаты [1]. Итак, пусть $B_{n,m}$ - матрица для ЗМП. Пусть n - число строк в $B_{n,t}$; m - число столбцов в $B_{n,t}$; p - плотность (частота) единичных элементов в $B_{n,t}$, т.е. отношение общего числа единиц к $n \times m$.

Математическое ожидание числа покрытий с k строками

$\mu_k = C_n^k \prod_{i=1}^{m} (1-\varepsilon_k)$, где

$$\varepsilon_k = \left(1-\frac{pn}{n}\right)\left(1-\frac{pn}{n-1}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{pn}{n-k+1}\right) \qquad (2)$$

$\varepsilon_k = 0$, если $n-np<k$. Мы используем оценку для n, согласно правила “ 3σ “

$$\mu_k \le \mu_k^* = C_n^k(1-\varepsilon_k)^m + \sqrt{C_n^k(1-\varepsilon_k)^m}$$

Условие $\mu_k^* < 1$ имеет место, если справедливо $C_n^k(1-\varepsilon_k)^m < 0,09$ (3)

в общем случае для правила $K\sigma$ получаем неравенство

$$C_n^k(1-\varepsilon_k)^m < \frac{K^2+2}{2} - \sqrt{\left(\frac{K^2+2}{2}\right)^2 - 1}. \qquad (3')$$

Неравенство (3) приводится к соотношению

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - \left(k+\frac{1}{2}\right)\ln k - (n-k) + \frac{1}{12n} - \frac{1}{12k+1} - \frac{1}{12(n-k)+1} - m\ln(1-\varepsilon_k) \le -1,5.$$

(4)

с использованием логарифмирования (3) и формулы Стирлинга. Если взять за основу (3'), то правую часть неравенства (4) нужно заменить на

$$0,91 + \ln\left(\frac{K^2+2}{2} - \sqrt{\left(\frac{K^2+2}{2}\right) - 1}.\right)$$

(т.е. К регулирует число итераций ПГР).

Ясно, что можно использовать (4), чтобы завершить поиск покрытия с весом, меньшим либо равным k, если вычислить ε_k. Из (2) следует, что необходимо знать число столбцов в матрице, полученной на основе ТНЗМК. Теперь видно, что для каждого исходного столбца D_j с единицами в строках $\beta_1,\ldots,\beta_2$ мы вводим число столбцов $\nu_j = C_{\beta_1},\ldots,C_{\beta_k}$ с общим числом единиц, равным $\nu_j \mid D_j \mid$, где $\mid D_j \mid$ - число единиц в столбце D_j матрицы $B_{n,m}$, а C_{β_1}. - вес строки β_1. Таким образом, нетрудно найти величину р для вычисления ε_k из (2) на основе указанных количественных соотношений.

Далее, формальный переход к эквивалентной невзвешенной задаче о покрытии позволяет указать “жадный” алгоритм для ЗМВП. Напомним, что его схема в случае ЗМП предписывает последовательно вводить в покрытие строки с максимальным числом единиц, после чего сокращать матрицу, удаляя покрываемые этими строками столбцы. Для реализации такой стратегии для ЗМВП необходимо уметь вычислять число единиц в строках эквивалентной невзвешенной матрицы, получаемой согласно подходам ТНЗМК.

Для иллюстрации обратимся к рис. 5. Нетрудно видеть, что число единиц E_i^l в строке β_i^l эквивалентной невзвешенной матрицы определяется из выражения

$$E_i^l = \sum_{\alpha} \prod_{\beta_k \in D_\alpha} C_{\beta_k}, \qquad (5)$$

где суммирование проводится по всем столбцам α взвешенной матрицы так, что строка β_i покрывает α; под знаком произведения указываются веса всех строк (за исключением β_i), покрывающих столбец α.

Теперь окончательно формализуем принцип “жадного” алгоритма для ЗМВП, Выбираем на каждом шаге для включения в искомое неизбыточное покрытие строку, доставляющую максимум оценки (5). Прежде всего, уточним сложностную оценку из [1] для невзвешенного случая с учетом (3'). Используя (3’), выразим m

$$\ln C_n^k + m\ln(1-\varepsilon_k) \le \ln\left(\frac{K^2+2}{2} - \sqrt{\left(\frac{K^2+2}{2}\right)^2 - 1}.\right)$$

С учетом того, что $\ln C_n^k \le n$ и $\ln(1-\varepsilon_k) \le -\varepsilon_k$, получаем

$$m \approx \frac{\ln\left(\frac{K^2+2}{2} - \sqrt{\left(\frac{K^2+2}{2}\right)^2 - 1}\right)}{\varepsilon_k}$$

Таким образом, при условии, что в добавляемых столбцах-резольвентах частота единичных элементов остается в среднем такой же, как и в статистически усредненном столбце исходной матрицы (это подтверждается на большом экспериментальном материале), найдем

$$m \approx n - \left(\frac{K^2+2}{2} - \sqrt{\left(\frac{K^2+2}{2}\right)^2 - 1}\right) / \sqrt{1-p}.$$

Отсюда число итераций N учитывает коэффициент в правиле $K\sigma$ следующим образом (для невзвешенной задачи о покрытии).

Перенося полученный результат на ЗМВП, заключаем, что сходимость теоретически ухудшается, так как в (6) растут m и n для ЗМВП, однако

$$m \approx \left(\frac{mp\left(n - \ln\left(\frac{K^2+2}{2} - \sqrt{\left(\frac{K^2+2}{2}\right)^2 - 1}\right)\right)}{\sqrt{1-p}}\right). \qquad (6)$$

общий вид сложности оценки для числа N итераций такой же, как и в невзвешенном случае, поскольку рассуждения проведены с учетом эквивалентного сведения ЗМВП к ЗМП.

На практике мы не обнаружили серьезного увеличения числа итераций с ростом размеров матрицы, например, среднее время работы с матрицами размером 100 х 150 составило $4 \div 10$, в то время как с матрицами $40 \times 40 - 0,2 \div 1$ с.

Следует отметить, что приведенная оценка сложности теоретически завышена, поскольку не учитывает ранее указанного факта, что по мере добавления столбцов- резольвент вероятность получения оптимального решения при повторной итерации перманентно возрастает. Сходимость статистически-оптимального алгоритма чувствительна к величине p. Однако, если исключить экстремальные случаи, алгоритм ведет себя достаточно равномерно в широком диапазоне задач.

Последнее замечание касается методики проведения экспериментов для практической апробации метода. Для матриц размером 40×40 сравнение выполнялось с решениями, доставляемыми точными методами, так как время их работы укладывалось для таких задач в диапазоне $1,5 \div 7$ мин. Для матриц размером 100×150 точные алгоритмы безнадежно “висели”, поэтому методика эксперимента базировалась на утверждению 3. Действительно, чтобы зафиксировать некоторый набор строк π* в качестве оптимального покрытия достаточно: 1) искусственно сгенерировать для π* множество синдромных столбцов, для которых $SR_\pi^{II} = \varnothing$ (согласно утверждениям 1*, 3); 2) случайным образом генерировать остальные столбцы, обеспечивая лишь их покрытие π. Отметим, что статистически оптимальный алгоритм дал указанные во введении результаты на матрицах 100×150, для которых вероятность наличия в $B_{n,m}$ минимального покрытия размером k была на порядок и более выше вероятности потери решения (последняя ~ 0,001). Это обстоятельство следует считать “типичным” на практике (т.е. с вероятностью, близкой к единице, оно имеет место для среднестатистической матрицы).

Библиографический список

1. Герман О.В. Статистически оптимальный алгоритм для задачи о минимальном покрытии / О.В. Герман, В.Г. Найденко // Экономика и мат. методы. - М.: Мир, 2013. Т. 29. Вып. 4. С. 42-48.
2. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц - М.: Наука, 2007. - 217 с.
3. Кофман А.А. Методы и модели исследования операций. Целочисленное программирование / А.А. Кофман, А. Анри-Лабордер - М.: Мир, 2012. - 241 с.
4. Балашевич В А. Алгоритмизация математических методов планирования / В. А. Балашевич - Минск: Вышэйш. шк., 2008. -218 с.
5. Ковалев М.М. Дискретная оптимизация / М.М. Ковалев. - Минск: Изд-во Белорус, ун-та, 2007. – 167 с.
6. Lee D.T., Wu Y.F. Geometric complexity of some location problems, Algorithmica, 1 / D.T. Lee, Y.F. Wu. - 1986. - p. 193-211.
7. McCreiqht E.M., van Wyk C.J. An *O*(*n* loglog *n*)-time algorithm for triangulating a simple polygon / E.M. McCreiqht, C.J. van Wyk // SIAM J. Comput., 17 - 1988. - p. 143-178.
8. Chazelle B.M., Edelsbrunner H. An optimal algorithm for intersecting line segments, manuscript / B.M. Chazelle, H. Edelsbrunner. - 2008. - 83 p.
9. Samuelson P.A. Abstract of a theorem concerning substituatability in open Leontief models / P.A. Samuelson. –I.: Collected Scientific papers, MIT Press, 2016. - pp. 36-44.
10. Zadeh L.A. Linear system Theory / L.A. Zadeh, C.A. Desoer // The State Space Approach, McGraw-Hill, N.Y., 1983. – p.p. 84-92.

References

1. German O.V. *Statisticheski optimal'nyy algoritm dlya zadachi o minimal'nom pokrytii* [A statistically optimal algorithm for the minimal covering problem] // O.V. Herman, V.G. Naidenko /Economics and Math. Methods. - M .: Mir, 2013. T. 29. Issue. 4. pp. 42-48. (In Russian).
2. Papadimitriou X. *Kombinatornaya optimizatsiya* [Combinatorial optimization] / X. Papadimitriou, K. Staiglitz - Moscow: Nauka, 2007. - 217 p. (In Russian).
3. Kofman AA *Metody i modeli issledovaniya operatsiy. Tselochislennoye programmirovaniye* [Methods and models of operations research. Integer Programming] / A.A. Kofman, A. Henri-Laborder - M .: Mir, 2012. - 241 p. (In Russian).
4. Balashevich V A. *Algoritmizatsiya matematicheskikh metodov planirovaniya* [Algorithmization of mathematical methods of planning] / VA Balashevich-Minsk: Vysheish. Шк., 2008. -218 с. (In Russian).
5. Kovalev M.M. *Diskretnaya optimizatsiya* [Discrete optimization]. Kovalev. - Minsk: Belarusian Publishing House, University, 2007. - 167 p. (In Russian).
6. Lee D.T., Wu Y.F. Geometric complexity of some location problems, Algorithmica, 1 / D.T. Lee, Y.F. Wu. - 1986. - p. 193-211.
7. McCreiqht E.M., van Wyk C.J. An *O*(*n* loglog *n*)-time algorithm for triangulating a simple polygon / E.M. McCreiqht, C.J. van Wyk // SIAM J. Comput., 17 - 1988. - p. 143-178.
8. Chazelle B.M., Edelsbrunner H. An optimal algorithm for intersecting line segments, manuscript / B.M. Chazelle, H. Edelsbrunner. - 2008. - 83 p.
9. Samuelson P.A. Abstract of a theorem concerning substituatability in open Leontief models / P.A. Samuelson. – I.: Collected Scientific papers, MIT Press, 2016. - pp. 36-44.
10. Zadeh L.A. Linear system Theory / L.A. Zadeh, C.A. Desoer // The State Space Approach, McGraw-Hill, N.Y., 1983. – p.p. 84-92.

Сведения об авторах

Лапшин Дмитрий Дмитриевич - *ЗАМ. ДИРЕКТОРА ИНСТИТУТА МЕЖДУНАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ И СОТРУДНИЧЕСТВА ВГТУ* ФГБОУ ВО ВГТУ, к.т.н., доцент, г. Воронеж, Российская Федерация; e-mail: lapshin@vgasu.vrn.ru

Лапшина Марина Леонидовна – профессор кафедры вычислительной техники и информационных систем ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова», доктор технических наук, г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: marina_lapshina@mail.ru

Юдина Надежда Юрьевна – доцент кафедры вычислительной техники и информационных систем ФГБОУ ВО "Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова", кандидат технических наук, г. Воронеж, Российская Федерация; e-mail: unu@list.ru

Information about authors

Lapshin Dmitry Dmitrievich - deputy. Director of the Institute of International Education and Cooperation of VSTU FGBOU VSTU, Ph.D., Associate Professor, Voronezh, Russian Federation; E-mail: lapshin@vgasu.vrn.ru

Lapshina Marina Leonidovna – Professor of Computer Science and information Systems at the Voronezh State Forestry University named after G.F. Morozova, Doctor of Technical Sciences, Voronezh, Russian Federation, e-mail: marina_lapshina@mail.ru

Yudina Nadezhda Yurievna - Associate Professor of Computer Science and Information Systems at the Voronezh State Forestry University named after G.F. Morozova ", candidate of technical sciences, Voronezh, Russian Federation; E-mail: unu@list.ru

DOI: 10.12737/article_59c2124049cd45.48567850
УДК 004.421.2

АНАЛИЗ ПЕРСПЕКТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ ОБЪЕМНО-КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ПОЗАКАЗНОГО ПРОИЗВОДСТВА МЕБЕЛИ

аспирант **Д. Е. Нырков**[1]
доктор технических наук, доцент **А. В. Стариков**[1]
1-ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова», Воронеж, Российская Федерация

В статье рассматриваются алгоритмы для использования в автоматизированных системах объёмно-календарного планирования позаказного производства мебели. Мелкосерийное и позаказное производство обеспечивает значительную долю мебельного рынка как в России, так и в зарубежных странах. Также оно является перспективным направлением для развития других отраслей промышленности, ориентированных на конечного потребителя. Большинство существующих отечественных систем планирования рассчитаны на крупносерийное и массовое производство, в котором главную роль занимает производительность предприятия. Следовательно, основным показателем, по которому осуществляется оптимизация расписаний, является момент завершения последней работы. Однако позаказное производство имеет намного более сложную структуру показателей, влияющих на успешность предприятия в целом: ключевым показателем в данном случае является не скорейшее окончание всех без исключения работ, а выполнение их не позже установленного времени (т.е. в течение сроков, установленных договорами с заказчиками). Также в позаказном и мелкосерийном производстве важную роль занимает показатель времени, затрачиваемый на переналадку оборудования, связанную с переходом на выпуск продукции другого типа. Если эти и ряд других показателей не имеют значительной роли в крупносерийном производстве, то в мелкосерийном производстве эти показатели имеют значительное влияние